РАДИАЛЬНО НЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЧНО ВОССТАНОВЛЕННОЙ ТИМПАНИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА

Любина Е.А., Михасев Г.И.
УО «Витебский государственный ордена Дружбы народов медицинский университет»

В работе рассматривается частично реконструированная звукопроводящая колебательная система среднего уха человека в случае, когда на поврежденную барабанную перепонку накладывается изготовленная из хряща искусственная мембрана (техника реконструкции «small island»)[1]. В центр искусственной мембраны устанавливается замещающий цепь косточек «молоточек-наковальня» Т-образный протез с круглым основанием, соединенный с головкой стременной косточки. Основание протеза практически полностью закрывает отверстие в барабанной перепонке, что позволяет рассматривать барабанную перепонку с искусственной мембраной как двухслойную кольцевую пластину, сопряженную на внутреннем контуре с основанием протеза. Протез моделируется как недеформируемый стержень, жестко склеенный с мембраной.

Цель. Целью работы является построение механико-математической модели колебательной системы среднего уха в случае его частичной реконструкции, описанной выше, для расчета собственных частот радиально несимметричных колебаний системы.

Материалы и методы. В работе использовались дифференциальные уравнения, описывающие движение слоистой пластины, а также система уравнений движения стержней, асимптотический метод решения дифференциальных уравнений в частных производных и численные методы решения полученных нелинейных уравнений.

Результаты и обсуждение. Введем прямоугольную ортогональную систему координат *Oxyz* с центром в основании покоящегося стремени. Центры пластинки и основания протеза находятся в одной точке O_P. Сопротивление связок овального окна будет наименьшим, если стремя совершает поступательное движение в направлении оси *Oz* и повороты вокруг оси *Ox* [2]. Поэтому для анализа малых (линейных) низкочастотных колебаний можно рассмотреть плоские движения цепи «протез-стремя».

Уравнение свободных колебаний упругой двухслойной кольцевой пластины будет иметь вид:

$$D(1-c_1\Delta)\Delta^2\chi(r,\varphi,t)+\rho_0 h\frac{\partial^2}{\partial t^2}(1-c_2\Delta)\chi(r,\varphi,t)=0, \qquad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат r, φ ($b \le r \le a$) с центром в точке O_p, $\chi(r,\varphi,t)$ – функция перемещения, связанная с прогибом пластины $W(r, \varphi, t)$ соотношением:

$$W(\rho,\varphi,t)=(1-c_2\Delta)\chi(r,\varphi,t), \qquad (2)$$

$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость пластинки, $h=h_1+h_2$ – толщина пластинки, E, ν – мгновенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала, из которого состоит пластина, параметры c_1 и c_2 зависят от количества слоев и физических свойств пластины.

В случае наличия одного узлового диаметра условия жесткой заделки примут вид:

$$(1-c_2\Delta)\chi(r,\varphi,t)\Big|_{r=a}=0,\ \frac{\partial\chi(r,\varphi,t)}{\partial r}\Big|_{r=a}=0,\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\chi(r,\varphi,t)\right)\Big|_{r=a}=0, \tag{3}$$

$$(1-c_2\Delta)\chi(r,\varphi,t)\Big|_{r=b}=b\cos\varphi\sin\Theta_p(t),\ \frac{\partial\chi(r,\varphi,t)}{\partial r}\Big|_{r=b}=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\chi(r,\varphi,t)\right)\Big|_{r=b}=0. \tag{4}$$

где Θ_p – угол поворота протеза и пластинки вокруг оси O_px.

Протез совершает вращательное движение относительно оси O_px, а стремя совершает сложное плоское движение, состоящее из поступательных движений вдоль осей Oy, Oz и вращения вокруг оси Cx, проходящей через центр масс C параллельно Ox. Для малых колебаний системы после линеаризации уравнений движения протеза и стремени [2] получим систему уравнений:

$$J_p\ddot{\Theta}_p=l_pY_k-\pi bD\left\{\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{W}{r^2}\right)+b\frac{\partial}{\partial r}\Delta W\right\}\Bigg|_{r=b},\ Z_k=0,$$
$$m_s\left(l_p\ddot{\Theta}_p-l_c\ddot{\Theta}_s\right)=Y_k-c_{22}\left(l_p\Theta_p-l_s\Theta_s\right),\quad J_c\ddot{\Theta}_s=Y_kl_c-c_{44}\Theta_s, \tag{5}$$

где J_p – момент инерции протеза относительно оси O_px, l_p – длина протеза, l_s – длина стремени (расстояние от его головки до основания), m_s – масса стремени, J_c – момент инерции стремени относительно оси Cx, l_c – расстояние от головки стремени K до центра масс, Y_k, Z_k – проекции силы F_k в шарнирном соединении K на оси Oy, Oz соответственно, параметры c_{22} и c_{44} характеризуют упругие свойства связок овального окна [3].

Проведем разделение переменных:

$$\chi(r,\varphi,t)=\chi(r)\cos\varphi\, e^{i\Omega t},\ \left(\Theta_p,\Theta_s,\mathrm{Y}_k,\mathrm{Z}_k\right)=e^{i\Omega t}\left(\theta_p,\theta_s,y_k,z_k\right), \tag{6}$$

где Ω – частота колебаний. Подставив (8) в (1),(3),(4) приходим к дифференциальному уравнению относительно $\chi(r)$, которое имеет решение в виде:

$$\chi(r)=\frac{-b\theta_p}{|\mathbf{M}|}P(r), \tag{7}$$

где

$$P(r)=\bar{\mathbf{M}}_{41}I_1(\xi_1r)+\bar{\mathbf{M}}_{42}K_1(\xi_1r)+\bar{\mathbf{M}}_{43}J_1(\xi_2r)+\bar{\mathbf{M}}_{44}Y_1(\xi_2r)+$$
$$\bar{\mathbf{M}}_{45}I_1(\xi_3r)+\bar{\mathbf{M}}_{46}K_1(\xi_3r),$$

M – матрица размерности 6×6, элементы которой ввиду их громоздкости здесь не приводятся, $|\mathbf{M}|$ – определитель матрицы M, $\bar{\mathbf{M}}_{4j}$ ($j=1,\ldots,6$) – ее соответствующие миноры, $J_1(x)$, $Y_1(x)$, $I_1(x)$, $K_1(x)$ – функции Бесселя первого порядка,

$$\xi_1(k)=\sqrt{k^2+(c_1-c_2)\frac{k^4}{2}+c_2^2\frac{k^6}{8}},\ \xi_2(k)=\sqrt{k^2-(c_1-c_2)\frac{k^4}{2}+c_2^2\frac{k^6}{8}},$$

$$\xi_3(k)=\sqrt{\frac{1}{c_1}+(c_2-c_1)k^4},\ k^4=\frac{\Omega^2\cdot\rho_0\cdot h}{D}.$$

Подставляя (6) в уравнения (5) и учитывая (2) и (7), приходим к трансцендентному уравнению относительно частоты колебаний Ω.

Выводы. Выведена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания частично реконструированной колебательной системы среднего уха. Для малых колебаний системы после линеаризации получена система линейных уравнений. После разделения переменных и решения дифференциального уравнения выведено трансцендентное уравнение относительно частоты колебаний. Полученное уравнение решается численно с использованием математического пакета Maple.

Литература:

1. Assessment of vibration characteristics of different cartilage reconstruction techniques for the tympanic membrane using scanning laser vibrometry / D. Murbe [et al.]; eds. J. J. Rosowski, S.N. Merchant // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstruction Middle Ears. – Netherland: The Hague, 2000.
2. Михасев, Г.И. Моделирование свободных колебаний звукопроводящей системы реконструированного среднего уха / Г.И. Михасев. М.А. Фирсов, В.П. Ситников // Российский журнал биомеханики. – 2005. Т. 9, № 1. – С. 52-62.
3. Modeling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behavior / H.-J. Beer [et al.] // Audiol Neurootol. – 1994. – Vol. 4. – P. 156-162.